

รายงานโครงการวิจัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

(โปรดระบุ)

- ☐ รายงานความก้าวหน้าครั้งที่.....ระหว่างเดือน.....พ.ศ. ถึง เดือน.....พ.ศ.
- ☒ รายงานฉบับสมบูรณ์ ระหว่างเดือน.....มกราคม.....พ.ศ. 2566 ถึง เดือน.....ธันวาคม.....พ.ศ. 2566

- ชื่อโครงการ (ไทย) ฟังก์ชันเลขคณิตที่สัมพันธ์กับจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่และจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่และการประยุกต์
(อังกฤษ) Arithmetic Function Associated with Exponentially Odd and Exponentially Even Integers and Applications
- ชื่อหัวหน้าโครงการ ดร. ผุสดี อย่างกลั่น
สถานที่ติดต่อ 33 ม. 3 ซอยสนามแดงบางพลี 29 ต.บางแก้ว อ.บางพลี จ.สมุทรปราการ 10540
โทรศัพท์ 0851421272
- ระยะเวลาตลอดโครงการ 1.....ปี.....เดือน
เริ่มโครงการวิจัยเมื่อเดือน มกราคม.....พ.ศ. 2566 ถึง เดือน.....ธันวาคม.....พ.ศ. 2566
- งบประมาณรวมตลอดโครงการ 146,000.....บาท
ปีที่ 1 (2566) 146,000.....บาท
- เป้าหมาย / ผลงานหลักของโครงการ
ผลงานหลักของโครงการคือสูตรในการคำนวณ และการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชันเลขคณิตที่สัมพันธ์กับจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่และจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่ โดยองค์ความรู้ใหม่ดังกล่าวจะเป็นประโยชน์กับนักวิจัยทางทฤษฎีจำนวน
- การพัฒนาเทคโนโลยี
สำหรับสูตรในการคำนวณและการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชันเลขคณิตที่สัมพันธ์กับจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่และจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่ ได้มีแผนงานที่จะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาไพทอน มาช่วยในการคำนวณและตรวจสอบความถูกต้องทางทฤษฎีในเชิงตัวเลขของฟังก์ชันเลขคณิต

7. รายละเอียดทางวิชาการที่ได้รับจากการวิจัย

7.1 ความก้าวหน้าของการวิจัย ณ ช่วงเวลารายงาน

จากการศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาการดีริคเลต์และสังวัตนาการยูนิแทรี และการกำหนดฟังก์ชันเลขคณิตที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งได้แก่ ฟังก์ชันฟีคู่ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคี่ทั่วไป $a(x,n)$ และ $b(x,n)$ จากการทำงานวิจัย ณ ช่วงเวลารายงาน ผู้วิจัยได้สูตรการคำนวณของฟังก์ชันเลขคณิตดังกล่าว สมบัติของฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาการดีริคเลต์และสังวัตนาการยูนิแทรีที่จำเป็น สูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับและสมบัติที่เกี่ยวข้อง และตรวจสอบความถูกต้องของสูตรการคำนวณของฟังก์ชันเลขคณิตในงานวิจัยโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาไพทอน (แสดงรายละเอียด ข้อ จ. และ ข้อ ฉ.) และได้นำเสนอส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่งานประชุมวิชาการระดับนานาชาติ The 27th Annual Meeting in Mathematics 2023 (AMM

2023) and International Conference in Number Theory and Applications 2023 (ICNA 2023) เมื่อวันที่ 30 มิถุนายน 2566 – 2 กรกฎาคม 2566 และได้รับการตอบรับตีพิมพ์ในวารสาร Thai Journal of Mathematics Special Issue (2023)

ก. บทสรุปโครงการ (ภาษาไทย)

จำนวนเต็มบวกในรูป ผลคูณของจำนวนเฉพาะ (prime factorization) จะถูกเรียกว่าจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันเป็นเลขคู่ และจะกล่าวว่าจำนวนเต็มบวกนั้นเป็นจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันเป็นเลขคี่ ในงานวิจัยนี้จะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการนับของจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่และจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่ การนับของจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่และจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคู่ สมบัติทางพีชคณิตภายใต้สังวัตนาการดิริคเลตและสังวัตนาการยูนิแทรี และการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับ

ข. บทสรุปโครงการ (ภาษาอังกฤษ) Abstract

An exponentially even integer is a positive integer whose prime factorization contains only even prime powers, while an exponentially odd integer is a positive integer whose prime factorization contains only odd prime powers. We investigate here the problem of counting the number of positive integers that are semi-prime or relatively prime to an exponentially even integer, and to an exponentially odd integer. Basic properties and asymptotic formula of the functions involved are established.

ค. บทนำ (Introduction)

ฟังก์ชันเลขคณิต (Arithmetic Functions) [1], [16] คือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่มีเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นโดเมน ในการศึกษาผลงานวิจัยครั้งนี้ จะให้ $\mathcal{A}$ แทนเซตของฟังก์ชันเลขคณิต ผลบวก ผลคูณสามัญ สังวัตนาการดิริคเลต (Dirichlet Convolution) และ สังวัตนาการยูนิแทรี (Unitary Convolution) ของฟังก์ชันเลขคณิต f, g กำหนดความหมายตามลำดับดังนี้

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$$

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

$$(f \square g)(n) = \sum_{d||n} f(d)g(n/d)$$

เมื่อ $d|n$ แทน สัญลักษณ์ d ที่หาร n ลงตัว และ สัญลักษณ์ $d||n$ แทน d ที่เป็นตัวหารยูนิแทรีของ n กล่าวคือ d หาร n ลงตัว และ ห.ร.ม. ของ d และ n/d คือ 1 ฟังก์ชัน $I(n)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity Function) นิยามโดย

$$I(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

โดยสำหรับ $f \in \mathcal{A}$ จะได้ว่า $(I * f) = (f * I) = f$ และ $(\square f) = (f \square I) = f$ และสำหรับฟังก์ชันเลขคณิต

$f \setminus \{0\}$ จะเรียก f ว่าฟังก์ชันแยกคูณ (Multiplicative function) ก็ต่อเมื่อ $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ ห.ร.ม. ของทั้งสองจำนวนคือ 1

ใน [1] และ [5] ได้พิสูจน์ว่า

- $(\mathcal{A}, +, *)$ เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม (Integral domain)
- $(\mathcal{A}, +, \square)$ เป็นริงสลับที่กับตัวหารของศูนย์
- สังวัตนาการดิริคเลตของสองฟังก์ชันแยกคูณ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ
- สังวัตนาการยูนิแทรีของสองฟังก์ชันแยกคูณ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ

อีกหนึ่งฟังก์ชันแยกคุณที่มีผู้ศึกษาสมบัติต่างๆไว้อย่างมาก คือ ฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ (Euler Phi function) [1] $\varphi(n)$ นิยามโดยจำนวนของจำนวนเต็มบวก $k \leq n$ โดยที่ $(k, n) = 1$ เมื่อ (k, n) แทนตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ k และ n ซึ่งเป็นที่ทราบโดยทั่วกันว่าสามารถแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ได้ดังนี้

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ (k,n)=1}} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d} \right)$$

โดยเรียก μ ว่าฟังก์ชันเลขคณิตเมอบิอุส (Möbius function) นิยามโดย

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^k, & n=p_1 p_2 \dots p_k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

อีกหนึ่งตัวดำเนินการของฟังก์ชันเลขคณิตคือ ไบสังวัตนาการยูนิแทรี (Bi-Unitary convolution) [11] นิยามโดยสำหรับฟังก์ชันเลขคณิต f, g

$$(f \Delta \Delta g)(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d)=1}} f(d)g(n/d)$$

โดยที่ $(m, n)^{**}$ คือ ตัวหารร่วมยูนิแทรีมากที่สุดของ m และ n

ในการศึกษางานวิจัยในครั้งนี้ได้ศึกษาและรวบรวมงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์รวมถึงสมบัติที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. ภาพผกผันของฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ (Inverse Image of Euler Phi function) $\varphi^{-1}(m)$ [13] นิยามโดย $\varphi^{-1}(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = m\}$ โดยใน [13] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของภาพผกผันของฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์กับจำนวนเฉพาะดังนี้ ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ ≥ 5 และ $2p+1$ เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว

$$\varphi^{-1}(p) = \{2p+1, 4p+2\}$$

2. ฟังก์ชันเลอจองด์ร์ (Legendre Function) [5] $\varphi(x, n)$ นิยามโดย สำหรับจำนวนจริง $x \geq 1$ ฟังก์ชันเลอจองด์ร์คือจำนวนเต็ม $k \leq x$ และ $(k, n) = 1$ ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\varphi(x, n) = \sum_{\substack{k \leq x \\ (k,n)=1}} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

โดยที่ $\varphi(n, n) = \varphi(n)$ นอกจากนี้ใน [2] ยังมีการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเลอจองด์ร์ กับฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ดังนี้

$$\varphi(x, n) = \frac{x\varphi(n)}{n} + O(\nu(n))$$

เมื่อ $\nu(n)$ คือ จำนวนของตัวหารของ n ที่เป็นกำลังสองเสรี (square free number) และ $O(n)$ คือ

Big-O ของ n

3. สำหรับจำนวนนับ a และ b กำหนดให้ $(a, b)^*$ คือตัวหารร่วมที่มากที่สุดของ a ที่ซึ่งเป็นตัวหารยูนิแทรีของ b ด้วย ถ้า $(a, b)^* = 1$ แล้วจะเรียก a ว่าเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะ (Semiprime) กับ b ใน [2] ได้ให้ความหมายของฟังก์ชัน $\varphi^*(n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq n$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับ n และได้พิสูจน์ว่า

$$\varphi^*(n) = \sum_{d|n} \bar{\mu}(d) \left(\frac{n}{d} \right) = (\bar{\mu} \square \zeta_1)(n)$$

โดยที่ $\bar{\mu}(n) = (-1)^{\omega(n)}$

เมื่อ $\omega(n)$ คือจำนวนตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันของ n โดย $\omega(1) = 0$ [19] และ $\zeta_1(n) = n$ นอกจากนี้ใน [2] ยังได้พิสูจน์อันดับเฉลี่ย (Average order) ของ $\varphi^*(n)$ นั่นคือ

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(n) = \frac{x^2}{2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)} \right) + o(x \log^2 x)$$

4. ใน Rao [9] ได้ให้ความหมายของฟังก์ชัน $\varphi_k(n)$ คือ จำนวนเต็มบวก $m \leq n$ โดยที่ $a^k | (m, n)$ สำหรับบางจำนวนนับ $a > 1$ และจำนวนนับ k ฟังก์ชันดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูป

$$\varphi_k(n) = \sum_{d|n} \mu_k(d) \left(\frac{n}{d} \right)$$

เมื่อ μ_k คือฟังก์ชันคลี นิยามโดย $\mu_k(n) = \mu(n^{1/k})$ เมื่อ $n^{1/k}$ เป็นจำนวนเต็มและ $\mu_k(n) = 0$ สำหรับกรณีอื่นๆ ([8], [15], [16]) โดยที่ $\mu_1 = \mu$ และ $\varphi_1 = \varphi$ นอกจากนี้ Satyanarayana [14] ยังศึกษาอันดับเฉลี่ยของ $\varphi_k(n)$ นั่นคือ

$$\sum_{n \leq x} \varphi_k(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2k)} + o(x \log x)$$

เมื่อ ζ คือฟังก์ชันซีตาของรีมัน (Riemann zeta function)

5. กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับที่มากกว่าเท่ากับ 2 ถ้า n ไม่มีตัวประกอบเฉพาะที่มีภาวะซ้ำที่น้อยกว่า k จะเรียก k ว่าเป็น k -เต็ม (k -full) และให้ Q_k แทนเซตของจำนวนเต็ม k -เต็ม ใน [3] ได้ให้นิยาม $\hat{\varphi}_k(n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq n$ ที่ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับตัวหารที่มากที่สุดของ n ที่อยู่ในเซต Q_k และพิสูจน์ว่าฟังก์ชันดังกล่าวแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\hat{\varphi}_k(n) = \sum_{d|n} \hat{\mu}_k(d) \left(\frac{n}{d} \right) \quad (1)$$

เมื่อ

$$\hat{\mu}_k(p^a) = \begin{cases} p^a, & \text{if } a = k+1 \\ -1, & \text{if } a = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

สำหรับจำเพาะ p นอกจากนี้ใน [3] ยังศึกษาอันดับเฉลี่ยของ $\hat{\varphi}_k(n)$ นั่นคือ

$$\sum_{n \leq x} \hat{\varphi}_k(n) = \frac{x^2}{2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{k+2}} \right) + o(x \log^2 x)$$

6. กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับ ในปี 1964, Cohen [4] ได้ให้ความหมายของ $\bar{\varphi}_k^*(n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq n$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับตัวหารยูนิแทรีที่มากที่สุดของที่อยู่ในเซต Q_k และยังพิสูจน์ว่า

$$\bar{\varphi}_k^*(n) = \sum_{d||n} \bar{\mu}_k(d) \left(\frac{n}{d} \right)$$

เมื่อ

$$\bar{\mu}_k(p^a) = \begin{cases} -1, & 1 \leq a < k \\ 0, & a \geq k \end{cases}$$

สำหรับจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $\bar{\mu}_2 = \mu$ และ $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}_k = \bar{\mu}$ ดังนั้น

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_k^*(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{d||n} \bar{\mu}_k(d) \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d||n} \bar{\mu}(d) \left(\frac{n}{d} \right) = \varphi^*(n)$$

นอกจากนี้ [4] ยังศึกษาอันดับเฉลี่ยของ $\bar{\varphi}_k^*(n)$ นั่นคือ

$$\sum_{n \leq x} \bar{\varphi}_k^*(n) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}_k(n) \varphi(n)}{n^3} + o(x \log^2 x)$$

7. สำหรับจำนวนนับ a, b และ k กำหนดให้ $(a, b)_k$ คือตัวหารร่วมที่มากที่สุดที่ยกกำลัง k ถ้า $(a, b)_k = 1$ จะเรียก a ว่าเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กำลัง k กับ b (Relatively k -prime) ในปี Suryanarayana [17] ได้ให้ความหมายของฟังก์ชัน $\varphi_k(x, n)$ คือ จำนวนเต็มบวก $\leq x$ ที่ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กำลัง k กับ n และได้พิสูจน์ว่า

$$\varphi_k(x, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, n)_k = 1}} 1 = \sum_{d|n} \mu_k(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

โดยที่ $\varphi_k(n, n) = \varphi_k(n)$ และ $\varphi_1(x, n) = \varphi(x, n)$

8. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ จะกล่าวว่า n เป็นจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่ (Exponentially odd integer) ถ้า n เขียนในรูปการแยกตัวประกอบเฉพาะได้ดังนี้ $n = p_1^{o_1} \cdots p_s^{o_s}$ สำหรับแต่ละจำนวนเฉพาะ p_i และ o_i เป็นจำนวนเต็มคี่ และให้ E_o แทนเซตของจำนวนเต็มเลขชี้กำลังคี่ (Exponentially odd integer) สังเกตว่า $n \in E_o$ ก็ต่อเมื่อตัวหารยูนิแทรีกำลังสองที่มากที่สุดของ n คือ 1 ดังนั้น $1 \in E_o$ ใน [2] มีการพิสูจน์ว่า

$$K(n) = \sum_{d||n} \bar{\mu}(d) \chi_o(n/d) = (\bar{\mu} \square \chi_o)(n)$$

เมื่อ χ_o คือฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ E_o (Characteristic function of E_o) และ

$$K(n) = \begin{cases} \bar{\mu}(n), & n \text{ is square} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

โดย K เป็นฟังก์ชันแยกคูณ Rao [10] ได้ขยายผลการศึกษาจากความสัมพันธ์ข้างต้นและสมการ (1) ดังนี้ กำหนดให้ a, b และ k เป็นจำนวนนับ ให้ $(a, b^k)_k^*$ แทนตัวหารยูนิแทรีกำลัง k ที่มากที่สุดของ n^k และ m โดยที่ $(a, b)_1^* = (a, b)^*$ และให้ฟังก์ชัน $\varphi_k^*(n)$ คือจำนวนเต็มบวก $m \leq n^k$ โดย $(m, n^k)_k^* = 1$ ใน [2] ยังพิสูจน์ว่า

$$\varphi_k^*(n) = \sum_{d||n} \bar{\mu}(d) \left(\frac{n}{d} \right)^k$$

โดยที่ $\varphi_1^*(n) = \varphi^*(n)$

9. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับและ $(a,b)^{**} = \max\{d \in \square \mid d \parallel a, d \parallel b\}$ ฟังก์ชันไบนารีหรือออยเลอร์ [7]
 $\varphi^{**}(n)$ นิยามโดย จำนวนเต็มบวก $m \leq n$ โดยที่ $(m,n)^{**} = 1$ โดย Laszlo Toth [7] ยังพิสูจน์ว่า

$$\varphi^{**}(n) = \sum_{d \parallel n} \bar{\mu}(d) \phi(n/d, d)$$

10. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับและ $A(n)$ เป็นสับเซตของเซตของตัวหารทั้งหมดของ n กำหนดให้ $(m,n)_{A,k}$ แทน
ตัวหารของ m ที่มากที่สุดที่อยู่ในรูป b^k และ $b^k \in A(n)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม b ใน [12] ได้ให้นิยามฟังก์ชันเลข
องค์ทั่วไพบ (the generalized Legendre totient function) $\varphi_{A,k}(x,n)$ ดังนี้ $\varphi_{A,k}(x,n)$ แทนจำนวนเต็มบวก $m \leq x$ โดย
ที่ $(m,n^k)_{A,k} = 1$ ใน [12] ยังแสดงว่า

$$\varphi_{A,k}(x,n) = \sum_{d \in A_k(n)} \mu_{A_k}(d) \left(\frac{x}{d^k} \right)$$

เมื่อ $A_k(n) = \{d > 0 \mid d^k \in A(n^k)\}$ และ $\mu_{A_k}(n) = 0$ หรือ -1 เมื่อ $n = p^{ak}$ สำหรับจำนวนเฉพาะ p .

11. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับและ $(m,n)_\Delta$ แทนตัวหารยูนิแทรีที่มากที่สุดของ m ที่หาร n ลงตัว ใน [6] ได้
นิยามฟังก์ชัน $\varphi_\Delta(n)$ คือ จำนวนนับ $m \leq n$ โดยที่ $(m,n)_\Delta = 1$ และได้ศึกษาภาพผกผันของฟังก์ชันดังกล่าวมีนิยาม
ดังนี้

$$\varphi_\square^{-1}(m) = \{n \in \square \mid \varphi_\Delta(n) = m\}$$

โดยใน [6] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของ $\varphi_\Delta(n)$ และ $\varphi_\square^{-1}(m)$ กับจำนวนเฉพาะได้สมบัติที่สำคัญดังนี้

- ถ้า $n = pm$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\varphi_\Delta(n) = (p-1)\varphi_\Delta(m)$
- ถ้า $n = pm$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะโดยที่ $(p,m)=1$ แล้ว $\varphi_\Delta(n) = p \varphi_\Delta(m)$
- ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ ≥ 5 และ $2p+1$ เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว

$$\varphi_\Delta^{-1}(2p) = \{2p+1, 4p+2\}$$

12. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ และ $n = p_1^{o_1} \cdots p_s^{o_s} q_1^{e_1} \cdots q_r^{e_r}$ เมื่อ p_i, q_j คือจำนวนเฉพาะ o_i คือจำนวน
เต็มบวกคี่ และ e_j คือจำนวนเต็มบวกคู่ ให้ $\alpha(n)$ คือ e -odd part และ $\beta(n)$ คือ e -even part ของ n กล่าวคือ

$$\alpha(n) = \begin{cases} p_1^{o_1} \cdots p_s^{o_s} & \text{if } \exists s \in \square \\ 1 & \text{if there is no such } s \end{cases}$$

และ

$$\beta(n) = \begin{cases} q_1^{e_1} \cdots q_r^{e_r} & \text{if } \exists r \in \square \\ 1 & \text{if there is no such } r \end{cases}$$

ใน [18] ได้กำหนดฟังก์ชันฟีคี่ (Odd-phi Function) $\varphi^*(\alpha;n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq n$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับ
 $\alpha(n)$ และฟังก์ชันฟีคู่ (Even-phi Function) $\varphi^*(\beta;n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq n$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับ $\beta(n)$
ใน [18] ยังได้พิสูจน์ว่า

$$\varphi^*(\alpha;n) = \sum_{d \parallel n} T(d) \left(\frac{n}{d} \right) \quad \text{และ} \quad \varphi^*(\beta;n) = \sum_{d \parallel n} K(d) \left(\frac{n}{d} \right)$$

เมื่อฟังก์ชัน K นิยามโดย (2) และ T นิยามโดย

$$T(p^a) = \begin{cases} -1, & a \text{ is odd} \\ 0, & a \text{ is even} \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

สำหรับจำนวนเฉพาะ p

ในการศึกษาทางทฤษฎีในครั้งนี้นำผู้วิจัยกำหนดฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องและขยายฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันฟอยเลอร์ที่กล่าวข้างต้นดังต่อไปนี้

- ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป $\varphi^*(\alpha; x, n)$ คือ จำนวนเต็มบวก $\leq x$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับ $\alpha(n)$
- ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป $\varphi^*(\beta; x, n)$ คือ จำนวนเต็มบวก $\leq x$ และเป็นจำนวนกึ่งเฉพาะกับ $\beta(n)$
- $a(x, n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq x$ และ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ $\alpha(n)$
- $b(x, n)$ คือจำนวนเต็มบวก $\leq x$ และ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ $\beta(n)$

สามารถแสดงเป็นสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\varphi^*(\alpha; x, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \alpha(n))^* = 1}} 1 \quad \varphi^*(\beta; x, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \beta(n))^* = 1}} 1$$

$$a(x, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \alpha(n)) = 1}} 1 \quad b(x, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \beta(n)) = 1}} 1$$

จ. วัตถุประสงค์ (Objectives)

1. เพื่อศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาการดีริคเลตและสังวัตนาการยูนิแทรี
2. เพื่อหาสูตรในการคำนวณของฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป $a(x, n)$ และ $b(x, n)$ ภายใต้สังวัตนาการดีริคเลต และสังวัตนาการยูนิแทรี
3. เพื่อศึกษาสมบัติการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Formula) ของฟังก์ชันเลขคณิต
4. เพื่อสูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Estimate) ของฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป $a(x, n)$ และ $b(x, n)$
5. เพื่อตรวจสอบความถูกต้องทางทฤษฎีในเชิงตัวเลขของฟังก์ชันเลขคณิต

จ. วิธีการทดลองและวิจัย (Materials & Methods)

สมบัติเบื้องต้นของฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาการดีริคเลตและสังวัตนาการยูนิแทรี สมบัติของจำนวนกึ่งเฉพาะ (Semiprime) และสมบัติทางพีชคณิตที่เกี่ยวข้องสำหรับการหาสูตรในการคำนวณ ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคูล์ทั่วไป $a(x, n)$ และ $b(x, n)$ มีดังนี้

Lemma 1. Let a, b be positive integer whose unique prime representations are so arranged as

$$a = k_a p_1^{B_1} \cdots p_u^{B_u} q_1^{Y_1} \cdots q_v^{Y_v} \quad \text{and} \quad b = k_b p_1^{b_1} \cdots p_u^{b_u} q_1^{Y_1} \cdots q_v^{Y_v}$$

Where p_i, p_j are distinct prime and k_a, k_b are positive integer such that

$$1 = \gcd(k_a, k_b) = \gcd(k_a, p_i) = \gcd(k_a, q_j) = \gcd(k_b, p_i) = \gcd(k_b, q_j),$$

$$b_i \leq B_i, y_j \leq Y_j \quad (i = 1, \dots, u; j = 1, \dots, v)$$

Then

$$A) (a, b)^* = \begin{cases} p_1^{b_1} \cdots p_u^{b_u} & \text{if there is such an integer } u. \\ 1 & \text{if there is no such an integer } u. \end{cases}$$

$$B) (a, b)^* = \ell \Leftrightarrow (a / \ell, b / \ell)^* = 1.$$

Proof.

A) If either a or b is equal to 1, then the result is trivial. Henceforth, assume that both a and b are > 1 .

If there is no such $u \in \mathbb{N}$, then $a = m q_1^{x_1} \cdots q_v^{x_v}, b = n q_1^{y_1} \cdots q_v^{y_v}$ where $y_j > x_j (j = 1, \dots, v)$. Clearly, the greatest divisor of a which is a unitary divisor of b in this case is 1. If there is such a $u \in \mathbb{N}$, then $a = k_a p_1^{a_1} \cdots p_u^{a_u} q_1^{x_1} \cdots q_v^{x_v}, b = k_b p_1^{b_1} \cdots p_u^{b_u} q_1^{y_1} \cdots q_v^{y_v}$, where $b_i \leq a_i (i = 1, \dots, u)$ and $y_j > x_j (j = 1, \dots, v)$. The greatest divisor of a which is a unitary divisor of b in this case is $p_1^{b_1} \cdots p_u^{b_u}$.

B) follows immediately from the result and proof in part A).

Lemma 2. Let a, m, n be positive integer. If $(a, m)^* = 1 = (a, n)^*$ then $(a, mn)^* = 1$.

Proof. Let the unique prime representation of a be

$$a = q_1^{\alpha_1} \cdots q_v^{\alpha_v},$$

Where $q_j (j = 1, \dots, v)$ are distinct primes and each $\alpha_j \in \mathbb{N}$.

If $(a, m)^* = 1 = (a, n)^*$ then Lemma 1 indicates that the integer m and n must be of the form

$$m = k_m q_1^{\beta_1} \cdots q_w^{\beta_w} \text{ or } m = k_m$$

and

$$n = k_n q_1^{\gamma_1} \cdots q_u^{\gamma_u} \text{ or } n = k_n$$

for some $w, u \in \{1, \dots, v\}$ and the remaining positive integers satisfy $\beta_i > \alpha_i, \gamma_j > \alpha_j, \gcd(k_m, q_i) = \gcd(k_n, q_j) = 1$. The product mn either contains a prime factor q_j of power $> \alpha_j$ or does not contain such a prime factor. In either case, Lemma 1 implies that $(a, mn)^* = 1$.

Lemma 3. If $\gcd(m, n) = 1$ and $(a, mn)^* = 1$ then $(a, m)^* = 1 = (a, n)^*$.

Proof. Let the unique prime representation of a be

$$a = q_1^{\alpha_1} \cdots q_v^{\alpha_v},$$

Where $q_j (j = 1, \dots, v)$ are distinct primes and each $\alpha_j \in \mathbb{N}$.

If $\gcd(m, n) = 1$ and $(a, mn)^* = 1$, then by Lemma 1

$$m = k_m q_1^{\delta_1} \cdots q_y^{\delta_y} \text{ or } m = k_m$$

and

$$n = k_n q_{y+1}^{\delta_{y+1}} \cdots q_z^{\delta_z} \text{ or } n = k_n$$

For some $y, z \in \{1, \dots, v\}$ with $y + z \leq v$ and the remaining positive integers satisfy $\delta_i >$

$\alpha_i, \gcd(k_m, q_i) = \gcd(k_n, q_j) = \gcd(k_m, k_n) = 1$. The product mn either contains a prime factor q_j of power $> \alpha_j$, or does not contain such a prime factor. In either case, Lemma 1 implies that $(a, m)^* = 1 = (a, n)^*$.

Lemma 4. Assume that $\gcd(a, m) = (a, m)^* = q_1^{a_1} \cdots q_v^{a_v}$ for distinct primes q_i and each $a_i \in \mathbb{N}$. Then by the definitions of $\gcd(a, m)$ and $(a, m)^*$, we have

$\gcd(a, m) = (a, m)^* \leftrightarrow$ either i) a or m equals 1

ii) $\text{ord}_p(a) \geq \text{ord}_p(m)$ for primes $p | \gcd(a, m)$.

Lemma 5. For a fixed positive integer a , the function $(a, n)^*$ is multiplicative in n .

Proof. Let $m, n \in \mathbb{N}$ be relatively prime and let $(a, mn)^* = 1 \in \mathbb{N}$. By Lemma 1 B), we have $(a/l, mn/l)^* = 1$. Since $\gcd(m, n) = 1$, there exist $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ such that

$$l = l_1 l_2, l_1 | m, l_2 | n, \gcd(l_1, l_2) = \gcd(m/l_1, n/l_2) = 1.$$

Lemma 2 B) thus yields $(a/l, m/l_1)^* = 1 = (a/l, n/l_2)^*$. Invoking upon Lemma 1 B), we get $\left(\frac{a}{l_2}, m\right)^* = l_1$ and $(a/l_1, n)^* = l_2$. Next, from Lemma 1 A), we have $(a/l_2, m)^* = (a, m)^*$ and $(a/l_1, n)^* = (a, n)^*$ and consequently, $(a, mn)^* = l_1 l_2 = (a, m)^* \cdot (a, n)^*$.

Lemma 6. Let E_e, E_o be the respective set of exponentially even and exponentially odd integers, whose characteristic function are χ_e, χ_o , respectively. Then

$$\chi_e \Delta \chi_o = U \quad \text{and} \quad T \Delta U = \chi_e$$

Proof. To verify the first relation, we start with $(\chi_e \sqcup \chi_o)(1) = \chi_e(1)\chi_o(1) = 1 = U(1)$. For $n > 1$, since χ_e and χ_o are clearly multiplicative, it suffices to verify at prime powers p^a , i.e., to show that $(\chi_e \sqcup \chi_o)(p^a) = U(p^a)$ and this follows from

$$(\chi_e \sqcup \chi_o)(p^a) = \chi_e(1)\chi_o(p^a) + \chi_e(p^a)\chi_o(1) = \begin{cases} 1 + 0 = 1 & \text{if } a \text{ is odd} \\ 0 + 1 = 1 & \text{if } a \text{ is even} \end{cases} = U(p^a)$$

To prove the second relation, we first verify $(T \sqcup U)(1) = T(1)U(1) = 1 = \chi_e(1)$. For $n > 1$, since T and U are multiplicative, it suffices to verify at prime powers, i.e., to show that $(T \sqcup U)(p^a) = \chi_e(p^a)$ and this follows from

$$(T, U)(p^a) = T(1) + T(p^a) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{if } a \text{ is odd} \\ 1 + 0 = 1 & \text{if } a \text{ is even} \end{cases} = \chi_e(p^a).$$

Lemma 7. Let f, g be arithmetic functions. Then

$$f = g \Delta T \Leftrightarrow g = f \Delta \chi_o \quad \text{and} \quad f = g \Delta K \Leftrightarrow g = f \Delta \chi_e$$

Proof: By Lemma 6, we have

$$f = g \sqcup T \Leftrightarrow f \sqcup U = g \sqcup \chi_e \Leftrightarrow f \sqcup \chi_o \sqcup U = g \sqcup U \Leftrightarrow f \sqcup \chi_o = g,$$

which is the first relation. The proof of the second relation is similar, i.e., from Lemma 6, we have

$$f = g \sqcup K \Leftrightarrow f \sqcup U = g \sqcup \chi_o \Leftrightarrow f \sqcup \chi_e \sqcup U = g \sqcup U \Leftrightarrow f \sqcup \chi_e = g.$$

สมบัติเบื้องต้นที่ใช้ในการหาสูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของ ฟังก์ชันพิคัวทั่วไป ฟังก์ชันพิคัวทั่วไป $a(x, n)$ และ $b(x, n)$ ดังนี้

Lemma 8. Let the functions T and K defined as above. Then

- the sum $\sum_{n=1}^{\infty} T(n)\varphi(n)/n^3$ converges absolutely to

$$\prod_p \text{prime} (1 - p/(p^2 + 1)(p + 1));$$

- the sum $\sum_{n=1}^{\infty} K(n)\varphi(n)/n^3$ converges absolutely to

$$\prod_p \text{prime} (1 - 1/p(p + 1)(p^2 + 1)).$$

Proof. Since $|T(n)| \leq 1$ and $\varphi(n) < n$, the sum $\sum_{n=1}^{\infty} T(n)\varphi(n)/n^3$ is absolutely convergent. Since the function $T(n)\varphi(n)/n^3$ is multiplicative, by [1, Theorem 11.6], we have the representation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)\varphi(n)}{n^3} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{T(p)\varphi(p)}{p^3} + \frac{T(p^2)\varphi(p^2)}{p^6} + \dots \right\}.$$

The function T only takes non-zero value, being -1 at odd prime powers, and so a typical term in the product is of the form

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T(p^{2j-1})\varphi(p^{2j-1})}{p^{3(2j-1)}} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p(p-1)}{p^{4j}} = 1 - \frac{p}{(p^2+1)(p+1)}.$$

The proof of the second sum is similar.

Lemma 9. Let $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, let $f \in A$, and let $v(n)$ be the number of square-free divisors of n . Assume that $|f(n)| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Then

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)v(n)}{n} = O(\log^2 x) \quad \text{and} \quad \sum_{n > x} \frac{f(n)\varphi(n)}{n^3} = O(1/x)$$

Proof. Consider

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{f(n)v(n)}{n} \right| \leq \sum_{n \leq x} \frac{v(n)}{n} \leq \sum_{n \leq x} \frac{\sigma_0(n)}{n} = O(\log^2 x),$$

where the last equality follows from [1, exercise 2 p. 70]. To prove the second equation, consider

$$\left| \sum_{n > x} \frac{f(n)\varphi(n)}{n^3} \right| \leq \sum_{n > x} \frac{\varphi(n)}{n^3} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} = O(1/x),$$

where the last equality follows from [1, Theorem 3.2 (c)].

Lemma 10. Let $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, let $f \in A$, and let $v(n)$ be the number of square-free divisors of n . Assume that $|f(n)| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Then

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{f(d)}{d} = x \sum_{n \leq x} \frac{f(n)\varphi(n)}{n^3} + O(\log^2 x)$$

and

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) \{x/d\} = O(x \log x).$$

Proof. Consider

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{f(d)}{d} = \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d\delta=n \\ (d,\delta)=1}} \frac{f(d)}{d} = \sum_{d \leq x} \frac{f(d)}{d} \sum_{\substack{\delta \leq x/d \\ (d,\delta)=1}} 1 = \sum_{d \leq x} \frac{f(d)}{d} \varphi(x/d, d),$$

Using Cohen's estimate in [3], we get

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq x} \frac{f(d)}{d} \varphi\left(\frac{x}{d}, d\right) &= x \sum_{d \leq x} \frac{f(d)\varphi(d)}{d^3} + O\left(\sum_{d \leq x} \frac{f(d)v(d)}{d}\right) \\ &= x \sum_{d \leq x} \frac{f(d)\varphi(d)}{d^3} + O\left(\sum_{d \leq x} \frac{\sigma_0(d)}{d}\right) \\ &= x \sum_{d \leq x} \frac{f(d)\varphi(d)}{d^3} + O(\log^2 x), \end{aligned}$$

where the last equality follows from [1, exercise 2 p. 70]. To prove the second equation, we proceed similarly from

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} \right| &\leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d\delta=n \\ (d,\delta)=1}} |f(d)| = \sum_{d \leq x} |f(d)| \sum_{\substack{\delta \leq x/d \\ (d,\delta)=1}} 1 = \sum_{d \leq x} |f(d)| \varphi(x/d, d) \\ &= x \sum_{d \leq x} \frac{|f(d)|\varphi(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d \leq x} |f(d)|v(d)\right) \leq x \sum_{d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d \leq x} \sigma_0(n)\right) = O(x \log x). \end{aligned}$$

Lemma 11. Let $x \in \mathbb{R}, x \geq 2$. Then

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} \geq \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x)$$

and

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(\beta(n))}{\beta(n)} \geq \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x).$$

Proof. We begin from

$$\frac{\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} = \prod_{p|\alpha(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(n)}{n},$$

which leads, by [1, exercises 4-5, p. 70] to

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} \geq \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x).$$

The proof of the second sum is the same.

Lemma 12. Let $x \in \mathbb{N}, x \geq 1$. Then

$$\begin{aligned} a(x, n) &= \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor, \quad a(n) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) n/d \\ b(x, n) &= \sum_{d|\beta(n)} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor, \quad b(n) = \sum_{d|\beta(n)} \mu(d) n/d. \end{aligned}$$

Proof. Using [1, Theorem 2.1, p. 25], we have

$$\begin{aligned} a(x, n) &= \sum_{\substack{m \leq x \\ \gcd(m, \alpha(n))=1}} 1 = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{\gcd(m, \alpha(n))} \right\rfloor = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{d|\gcd(m, \alpha(n))} \mu(d) \\ &= \sum_{d|\alpha(n)} \sum_{q=1}^{\lfloor x/d \rfloor} \mu(d) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor, \end{aligned}$$

and the first two relations follow. The proofs for $b(x, n)$ and $b(n)$ are similar.

Lemma 13. Let x be a real number ≥ 1 . Then

$$a(x, n) = \frac{x\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} - \varepsilon_\alpha(x, n), \quad b(x, n) = \frac{x\varphi(\beta(n))}{\beta(n)} - \varepsilon_\beta(x, n),$$

where $\{ \cdot \}$ denoting the fractional part,

$$\varepsilon_\alpha(x, n) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \{x/d\}, \quad \varepsilon_\beta(x, n) = \sum_{d|\beta(n)} \mu(d) \{x/d\}$$

Moreover, we have

$$|\varepsilon_\alpha(x, n)| < \sigma_0(\alpha(x, n)), \quad |\varepsilon_\beta(x, n)| < \sigma_0(\beta(x, n)),$$

where $\sigma_0(m) := \sum_{d|m} 1$ is the divisor function.

Proof. By lemma 12 and [1, Theorem 2.3], we have

$$a(x, n) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \left(\frac{x}{d} - \left\{ \frac{x}{d} \right\} \right) = \frac{x\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} - \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\}.$$

Next,

$$|\varepsilon_\alpha(x, n)| \leq \sum_{d|\alpha(n)} |\mu(d) \{x/d\}| \leq \sum_{d|\alpha(n)} \{x/d\} < \sum_{d|\alpha(n)} 1.$$

The proof for $b(x, n)$ is the same.

Lemma 14. Let $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$. Then

$$\sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(x, n) = O(x \log x), \quad \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(n, n) = O(x \log x)$$

and

$$\sum_{n \leq x} \varepsilon_\beta(x, n) = O(x \log x), \quad \sum_{n \leq x} \varepsilon_\beta(n, n) = O(x \log x)$$

Proof. From lemma13, we have

$$\left| \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(x, n) \right| \leq \sum_{n \leq x} \sum_{d|\alpha(n)} |\mu(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\}| \leq \sum_{n \leq x} \sigma_0(\alpha(n)) \leq \sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = O(x \log x).$$

Proceeding similarly, we get

$$\left| \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(n, n) \right| \leq \sum_{n \leq x} \sum_{d|\alpha(n)} |\mu(d)| \leq \sum_{n \leq x} \sigma_0(\alpha(n)) \leq \sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = O(x \log x).$$

The proof ε_β is the same.

Lemma 15. Let $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$. Then

$$a(x, n) \leq x \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \varepsilon_\alpha(x, n), \quad b(x, n) \leq x \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \varepsilon_\beta(x, n).$$

Proof. From lemma14, we have

$$a(x, n) = \frac{x\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} - \varepsilon_\alpha(x, n) \leq x \left(\frac{\alpha(n) - 1}{\alpha(n)} \right) - \varepsilon_\alpha(x, n) \leq x \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \varepsilon_\alpha(x, n).$$

The proof for $b(x, n)$ is analogous.

ฉ. รายงานผลการทดลอง (Results)

ทฤษฎีบทหลักของงานวิจัยคือสูตรในการคำนวณ ฟังก์ชันฟีคั่วทั่วไป ฟังก์ชันฟีคั่วทั่วไป $a(x, n)$ และ $b(x, n)$ ภายใต้สิ่งแวดล้อม การการดิริคเลต และสิ่งแวดล้อมการยูนิแทรี การประมาณค่าเชิงเส้นกำกับ และสมบัติของฟังก์ชันเลขคณิตดังกล่าวมีดังต่อไปนี้

Theorem 1. For a positive integer n and real number $x \geq 2$, we have

$$\varphi^*(\alpha; x, n) = \sum_{d|n} T(d) \lfloor x/d \rfloor \quad \text{and} \quad \varphi^*(\beta; x, n) = \sum_{d|n} K(d) \lfloor x/d \rfloor$$

Proof: Since $\alpha(1) = 1$, from its definition we get

$$\varphi^*(\alpha; x, 1) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \alpha(1))^* = 1}} 1 = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, 1)^* = 1}} 1 = [x] = \sum_{d|1} T(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

Let n be a positive integer > 1 whose odd-even prime representation is $n = p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}$. Then $\alpha(n) = p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}$ and by the inclusion- exclusion principle, we have

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha; x, n) &= \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \alpha(n))^* = 1}} 1 = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s})^* = 1}} 1 = [x] - \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s})^* \neq 1}} 1 \\ &= [x] - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^s \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i} p_j^{o_j}} \right\rfloor + \dots + (-1)^s \left\lfloor \frac{x}{p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Since $T(p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} \cdot q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}) = 0$ if there is such an integer $r \in \mathbb{N}$, we get

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} T(d) \lfloor x/d \rfloor &= \sum_{d|p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}} T(d) \lfloor x/d \rfloor \\
&= T(1) \lfloor x \rfloor + \sum_{i=1}^s T(p_i^{o_i}) \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^s T(p_i^{o_i} p_j^{o_j}) \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i} p_j^{o_j}} \right\rfloor + \dots + T(p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}) \left\lfloor \frac{x}{p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}} \right\rfloor \\
&= \lfloor x \rfloor - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^s \left\lfloor \frac{x}{p_i^{o_i} p_j^{o_j}} \right\rfloor + \dots + (-1)^s \left\lfloor \frac{x}{p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s}} \right\rfloor = \varphi^*(\alpha; x, n).
\end{aligned}$$

Since $\varphi^*(\alpha; n) = \varphi^*(\alpha; n, n)$, the first two relations follow. To verify the second set of relations, we first look at the case $n = 1$. Since $\beta(1) = 1$, we have

$$\varphi^*(\beta; x, 1) = \sum_{m \leq x} 1 = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \beta(1))^* = 1}} 1 = \lfloor x \rfloor = \sum_{d|n} K(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

Let n be a positive integer > 1 whose odd-even prime representation is $n = p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}$. Then $\beta(n) = q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}$ and by the inclusion- exclusion principle, we have

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\beta; x, n) &= \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, \beta(n))^* = 1}} 1 = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r})^* = 1}} 1 = \lfloor x \rfloor - \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r})^* \neq 1}} 1 \\
&= \lfloor x \rfloor - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i} q_j^{e_j}} \right\rfloor + \dots + (-1)^r \left\lfloor \frac{x}{q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Since $K(p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} \cdot q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}) = 0$ if there is such an integer $s \in \mathbb{N}$, we get

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} K(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor &= \sum_{d|q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}} T(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\
&= K(1) \lfloor x \rfloor + \sum_{i=1}^r K(q_i^{e_i}) \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r K(q_i^{e_i} q_j^{e_j}) \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i} q_j^{e_j}} \right\rfloor + \dots + K(q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}) \left\lfloor \frac{x}{q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}} \right\rfloor \\
&= \lfloor x \rfloor - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i}} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r \left\lfloor \frac{x}{q_i^{e_i} q_j^{e_j}} \right\rfloor + \dots + (-1)^r \left\lfloor \frac{x}{q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}} \right\rfloor = \varphi^*(\beta; x, n).
\end{aligned}$$

Since $\varphi^*(\beta; n) = \varphi^*(\beta; n, n)$, the last two relations follow.

Theorem 2. Let x be real number ≥ 2 . Then

$$\begin{aligned}
a(x, n) &= \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor, & a(n, n) &:= a(n) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) n/d, \\
b(x, n) &= \sum_{d|\beta(n)} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor, & b(n, n) &:= b(n) = \sum_{d|\beta(n)} \mu(d) n/d
\end{aligned}$$

Proof. Using [1, Theorem 2.1, p. 25], we have

$$\begin{aligned}
a(x, n) &= \sum_{\substack{m \leq x \\ \gcd(m, \alpha(n))=1}} 1 = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \left| \frac{1}{\gcd(m, \alpha(n))} \right| = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{d|\gcd(m, \alpha(n))} \mu(d) \\
&= \sum_{d|\alpha(n)} \sum_{q=1}^{\lfloor x/d \rfloor} \mu(d) = \sum_{d|\alpha(n)} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor,
\end{aligned}$$

and the first two relations follow. The proofs for $b(x, n)$ and $b(n)$ are similar.

Corollary 1. Let n be positive integer and x be real number ≥ 2 .

i) If $n \in E_o$, then

$$\varphi^*(\alpha; x, n) = \sum_{d|n} \bar{\mu}(d) \lfloor x/d \rfloor, \quad \varphi^*(\alpha; n) = \varphi^*(n),$$

$$\varphi^*(\beta; x, n) = \lfloor x \rfloor, \quad \varphi^*(\beta; n) = n.$$

ii) If $n \in E_e$, then

$$\varphi^*(\alpha; x, n) = \lfloor x \rfloor, \quad \varphi^*(\alpha; n) = n,$$

$$\varphi^*(\beta; x, n) = \sum_{d|n} \bar{\mu}(d) \lfloor x/d \rfloor, \quad \varphi^*(\beta; n) = \varphi^*(n).$$

Proof. The results hold trivially for $n = 1$.

i) For $n = 1$, since $n \in E_o$, we have $\alpha(n) = n, \beta(n) = 1, T(n) = \bar{\mu}(n)$ and $k(n) = 0$, and the assertions are immediate consequences of Theorem1. The proof for ii) is similar.

Corollary 2.

$$\varphi^*(\alpha; n) \varphi^*(\beta; n) = n \varphi^*(n).$$

Proof. Clearly, $\varphi^*(\alpha; 1) \varphi^*(\beta; 1) = 1 \times 1 = 1 \times \varphi^*(1)$. Let $n > 1$ whose odd-even prime representations is

$n = p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}$. We have

$$\varphi^*(\alpha; n) = \prod_{i=1}^s (p_i^{o_i} - 1) q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}, \quad \varphi^*(\beta; n) = p_1^{o_1} \dots p_s^{o_s} \prod_{j=1}^r (q_j^{e_j} - 1)$$

Corollary 3. For prime p and $a \in \mathbb{N}$, we have

$$a(p^a) = \begin{cases} p^a & \text{if } a \text{ is even} \\ \varphi(p^a) & \text{if } a \text{ is odd} \end{cases}, \quad b(p^a) = \begin{cases} \varphi(p^a) & \text{if } a \text{ is even} \\ p^a & \text{if } a \text{ is odd.} \end{cases}$$

Proof. For even a , we have $\alpha(p^a) = 1, \beta(p^a) = p^a$ and so

$$a(p^a) = \sum_{\substack{m \leq p^a \\ \gcd(m,1)=1}} 1 = p^a, \quad b(p^a) = \sum_{\substack{m \leq p^a \\ \gcd(m,1)=1}} 1 = \varphi(p^a).$$

The proof of the case of odd a is similar.

Corollary 4. For a positive integer n and prime p , we have

i) $a(n)b(n) = n \varphi(n)$;

ii) $a(n) = n \prod_{p|\alpha(n)} (1 - 1/p), \quad b(n) = n \prod_{p|\beta(n)} (1 - 1/p).$

Proof. Part i) is an immediate consequence of Corollary 4. Part ii) follows from the Theorem2 and the identity ([1, Theorem 2.18]) $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$ by taking the multiplicative function $f(n) = 1/n$.

Theorem 3. Let $x \in \mathbb{R}, x \geq 2$. Then

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(\alpha; n) = \frac{x^2}{2} \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{p}{(p^2 + 1)(p + 1)} \right) + O(x \log^2 x) \quad (1)$$

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(\alpha; x, n) = x^2 \sum_{n \leq x} \frac{T(n) \varphi(n)}{n^3} + O(x \log^2 x) \quad (2)$$

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(\beta; n) = \frac{x^2}{2} \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{p(p + 1)(p^2 + 1)} \right) + O(x \log^2 x) \quad (3)$$

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(\beta; x, n) = x^2 \sum_{n \leq x} \frac{K(n) \varphi(n)}{n^3} + O(x \log^2 x). \quad (4)$$

Proof. From Theorem 1, we have

$$\sum_{n \leq x} \varphi^*(\alpha; n) = \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d\delta=n \\ \gcd(d,\delta)=1}} dT(\delta) = \sum_{\delta \leq x} T(\delta) \sum_{\substack{d \leq x/\delta \\ \gcd(d,\delta)=1}} d.$$

Putting $\sigma_1(x, n) := \sum_{\substack{m \leq x \\ \gcd(m,n)=1}} m$, and using Cohen's estimate ([2, Lemma 4.1])

$$\sigma_1(x, n) = \frac{x^2 \varphi(n)}{2n} + O(x \bar{d}(n)),$$

the relation (1) follows from

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi^*(\alpha; n) &= \sum_{\delta \leq x} T(\delta) \sigma_1(x/\delta, \delta) = \frac{x^2}{2} \sum_{\delta \leq x} \frac{T(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} + O\left(x \sum_{\delta \leq x} \frac{T(\delta) \bar{d}(\delta)}{\delta}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{T(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} - \frac{x^2}{2} \sum_{\delta > x} \frac{T(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} + O\left(x \sum_{\delta \leq x} \frac{T(\delta) \bar{d}(\delta)}{\delta}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{T(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} + O(x) + O(x \log^2 x), \end{aligned}$$

where the last two estimates are taken from Lemma 9, and the value of infinite sum is taken from Lemma 8.

The proof of (2) analogously follows from

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi^*(\alpha; x, n) &= x \sum_{n \leq x} \sum_{d \parallel n} \frac{T(d)}{d} - \sum_{n \leq x} \sum_{d \parallel n} T(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} \\ &= x^2 \sum_{n \leq x} \frac{T(n) \varphi(n)}{n^3} + O(x \log^2 x) + O(x \log x) \end{aligned}$$

The proofs of (3) and (4) proceed in the same manner as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi^*(\beta; n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d\delta=n \\ (d,\delta)=1}} dK(\delta) = \sum_{\delta \leq x} K(\delta) \sum_{\substack{d \leq x/\delta \\ (d,\delta)=1}} d = \sum_{\delta \leq x} K(\delta) \sigma_1(x/\delta, \delta) \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{\delta \leq x} \frac{K(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} + O\left(x \sum_{\delta \leq x} \frac{K(\delta) \bar{d}(\delta)}{\delta}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{K(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} - \frac{x^2}{2} \sum_{\delta > x} \frac{K(\delta) \varphi(\delta)}{\delta^3} + O\left(x \sum_{\delta \leq x} \frac{K(\delta) \bar{d}(\delta)}{\delta}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} K_1 + O(x) + O(x \log^2 x) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi^*(\beta; x, n) &= x \sum_{n \leq x} \sum_{d \parallel n} \frac{K(d)}{d} - \sum_{n \leq x} \sum_{d \parallel n} K(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} \\ &= x^2 \sum_{n \leq x} \frac{K(n) \varphi(n)}{n^3} + O(x \log^2 x) + O(x \log x). \end{aligned}$$

Theorem 6. Let $x \in \mathbb{R}, x \geq 2$. Then

$$\frac{x^2}{\varsigma(2)} + O(x \log x) \leq \sum_{n \leq x} a(x, n) \leq x^2 + O(x \log x) \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{2\varsigma(2)} + O(x \log x) \leq \sum_{n \leq x} a(n) \leq \frac{x^2}{2} + O(x \log x) \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{\varsigma(2)} + O(x \log x) \leq \sum_{n \leq x} b(x, n) \leq x^2 + O(x \log x) \quad (7)$$

$$\frac{x^2}{2\varsigma(2)} + O(x \log x) \leq \sum_{n \leq x} b(n) \leq \frac{x^2}{2} + O(x \log x). \quad (8)$$

Proof. To prove (5), we start from Lemma 13 and making use of Lemma 14 to get

$$\sum_{n \leq x} a(x, n) \leq x \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(x, n) = x \sum_{n \leq x} 1 - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + O(x \log x) = x^2 + O(x \log x).$$

For the opposite estimate, from Theorem 2, Lemmas 11 and 13, we get

$$\sum_{n \leq x} a(x, n) = x \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(\alpha(n))}{\alpha(n)} - \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(x, n) \geq \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \log x).$$

To prove (6), we put $x = n$ in Lemma 12 to get

$$a(n) = a(n, n) \leq n(1 - 1/n) - \varepsilon_\alpha(x, n)$$

and then use Lemma 14 to deduce that

$$\sum_{n \leq x} a(n) \leq \sum_{n \leq x} n \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{n \leq x} \varepsilon_\alpha(n, n) = \sum_{n \leq x} n - \sum_{n \leq x} 1 + O(x \log x) = \frac{x^2}{2} + O(x \log x).$$

Since $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p) \leq n \prod_{p|\alpha(n)} (1 - 1/p) = a(n)$, by [1, Theorem 3.7], we have

$$\sum_{n \leq x} a(n) \geq \sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log x).$$

The proofs of (7) and (8) are the same as those of (5) and (6), respectively.

สำหรับสูตรการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาไพทอนของฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไป ฟังก์ชัน $a(x, n)$ และฟังก์ชัน $b(x, n)$ และสมบัติที่เกี่ยวข้องแสดงในภาคผนวก

ข. ข้อวิจารณ์ (Discussion)

จากรายงานผลการวิจัยซึ่งจะเป็นไปตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 1 – 5

ข. สรุปและข้อเสนอแนะ (Conclusion)

สูตรของฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไป และฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไปสามารถแสดงด้วยบางฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาตริคเลต ฟังก์ชัน $a(x, n)$ และฟังก์ชัน $b(x, n)$ สามารถแสดงด้วยบางฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้สังวัตนาตริคเลต รวมถึงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ฟังก์ชันดังกล่าว ตรวจสอบสูตรการคำนวณและสมบัติต่างๆ ด้วยทฤษฎีเชิงตัวเลขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไพทอน สูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับและสมบัติที่เกี่ยวข้องของฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไป ฟังก์ชันฟีคู้ทั่วไป ฟังก์ชัน $a(x, n)$ และฟังก์ชัน $b(x, n)$ ถูกแสดงในงานวิจัยนี้ ซึ่งจะเป็นองค์ความรู้ใหม่ให้กับนักวิจัยทางทฤษฎีจำนวน

ข. เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] APOSTOL, T.M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, New York, 1976.
- [2] COHEN, E., Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer, *Math. Zeit*, 74, 66-80, 1960.
- [3] COHEN, E., Some Analogue of Certain Arithmetical Functions, *Riv. Mat. Pama.*, 4, 115-125, 1963.
- [4] COHEN, E., Arithmetical notes. X. A Class of Totient, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 534-539, 1964.
- [5] DICKSON, L.E., *History of the Theory of Numbers*, Divisibility and Primality, Chelsea, New York, 1999.
- [6] KIRAN BABU, E., and VIJAYASEKHARA REDDY, P., On the Image of the Unitary Euler's Totient Function, *J. Comp. & Math. Sci.*, 3, 185 – 189, 2012.
- [7] KLEE, V.L., A Generalization of Euler's φ function, *Amer. Math. Monthly*, 55, 358-359, 1948.

- [8] Laszlo, T., On the Bi-Unitary Analogue of Euler's Arithmetical Function and the Gcd- Sum Function, *Journal of Integer Sequences*, 12, 1- 10, 2009.
- [9] NAGESWARA RAO, K., A Note of an Extension of Euler's Function, *Math. Student*, 29, 33-35, 1961.
- [10] NAGESWARA RAO, K., On the Unitary Analogue of Certain Totients, *Monatsh. Math.*, 70, 105-117, 1966.
- [11] PENTTI, H., Basic Properties of the Bi-Unitary Convolution and the Semi-Unitary Convolution, *Indian Journal of Mathematics*, 40, 305-315, 1998.
- [12] PENTTI, H., On An Inequality Related to the Legendre Totient Function, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 3, 37, 2002.
- [13] RODNEY, C., On the image of Euler's totient function, *HAL Open Science*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00423598>, 2009.
- [14] SATYANARAYANA, U.V., PATTABHIRAMASASTRY K., A Note on the Generalized φ -function, *Math. Student.*, 33, 81-83, 1965.
- [15] Sandor, J. and Crstici, B., *Handbook of Number Theory II*, Kluwer, Dordrecht 2004.
- [16] SIVARAMAKRISHNAN, R., *Classical Theory of Arithmetic Functions*, Marcel Dekker, New York-Basel, 1989.
- [17] SURYANARAYANA, D., The Number of k-ary Divisor of an Integer, *Monatsh. Math.*, 72, 445-450, 1968.
- [18] YANGKLAN, P., Ruengsinsub P., Laohakosol V., Unitary Convolution and Generalized Mobius function, *KMITL Science and Technology Journal*, 17, 1-12, 2016.
- [19] YANGKLAN, P., LAOHAKOSOL, V., and MAVECHA S., Unitary Analogue of some Arithmetic Functions, *Thai Journal of Mathematics*, 127 – 134, 2020.

7.2 ตารางแสดงความก้าวหน้าของผลงานวิจัย

ตารางที่ 7.1 ความก้าวหน้าของผลงานวิจัย ณ ช่วงรายงานเมื่อเทียบกับแผนงานวิจัยทั้งโครงการ

รายละเอียดของแผนงาน	ความก้าวหน้าผลงานวิจัย ปีที่ 1 (ปี 2566)												ผลงานที่ได้
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1. สืบค้นและ ทบทวนงานวิจัย	←→												
2. ศึกษา รวบรวม ทฤษฎี สมบัติและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง		←→											
3. กำหนดฟังก์ชันเลขคณิตที่ต้องการวิเคราะห์ วิเคราะห์ และพิสูจน์สมบัติทางพีชคณิตและการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน วิเคราะห์สูตรที่ใช้คำนวณของฟังก์ชันเลขคณิต			←→										
4. ตรวจสอบความถูกต้องกับผู้เชี่ยวชาญและเครื่องคอมพิวเตอร์						←→							
5. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้จากการตรวจสอบแก้ไขปรับปรุง								←→					
6. นำผลการวิจัยมาสรุปผล จัดเตรียมเอกสารรายงาน เตรียมนำเสนอผลงานหรือตีพิมพ์ผลงานวิจัย					←→						←→		นำเสนอผลงานวิจัยที่ งานประชุมวิชาการ ระดับนานาชาติ AMM2023 & ICNA 2023 เมื่อวันที่ 30 มิ.ย. - 2 ก.ค. 2566 และ ได้รับการตอบรับตีพิมพ์ ในวารสาร Thai Journal of Mathematics Special Issue 2003

←→ แผนงานวิจัยทั้งโครงการที่วางไว้

←-----> ผลงานวิจัยที่ดำเนินจนถึงปัจจุบัน

ตารางที่ 7.2 เป้าหมายผลงานในแต่ละช่วงเวลา

ปีที่	เดือนที่	รายละเอียดของแผนงาน	ผลงานที่คาดว่าจะได้รับ	ตอบวัตถุประสงค์ข้อใด	ผลจากการปฏิบัติงานจริง	ความสำเร็จ (%)
1	1 - 6	1. สืบค้นและ ทบทวนงานวิจัย 2. ศึกษา รวบรวม ทฤษฎี สมบัติและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	ได้ความรู้ความเข้าใจพื้นฐานสำหรับงานวิจัย รวมถึงทฤษฎีและสมบัติบางประการที่จำเป็น กับงานวิจัย	ข้อ 1. ข้อ 3.	ได้ความรู้ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับงานวิจัย รวมถึงทฤษฎีและสมบัติบางประการที่จำเป็น กับงานวิจัย	100%
		3. กำหนดฟังก์ชันเลขคณิตที่ต้องการวิเคราะห์และพิสูจน์สมบัติทางพีชคณิต และการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน	ได้สูตรการคำนวณของฟังก์ชันเลขคณิตที่ต้องการวิเคราะห์ สมบัติทางพีชคณิตที่เกี่ยวข้อง และสูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน	ข้อ 2. ข้อ 3. ข้อ 4.	ได้สูตรในการคำนวณของฟังก์ชันพีคั่วทั่วไป ฟังก์ชันพีคี่ทั่วไป $a(x,n)$ และ $b(x,n)$ และสมบัติทางพีชคณิตที่จำเป็น	100%
		4. ตรวจสอบความถูกต้องกับผู้เชี่ยวชาญและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ 5. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้จากการตรวจสอบ แก้ไขและปรับปรุง	ได้ตรวจสอบความถูกต้องของสูตรการคำนวณของฟังก์ชันเลขคณิตที่ต้องการวิเคราะห์และสูตรการประมาณค่าเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน	ข้อ 2. ข้อ 4. ข้อ 5.	ได้สูตรในการคำนวณของฟังก์ชันพีคั่วทั่วไป ฟังก์ชันพีคี่ทั่วไป $a(x,n)$ และ $b(x,n)$ ที่ถูกต้อง	100%
		6. นำผลการวิจัยมาสรุปผล จัดเตรียมเอกสารรายงาน เตรียมนำเสนอผลงานหรือตีพิมพ์ผลงานวิจัย	สรุปผลงานวิจัยและเผยแพร่ผลงานวิจัย	ข้อ 2. ข้อ 4.	นำเสนอส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่งาน AMM2023 & ICNA 2023 เมื่อวันที่ 30 มิ.ย. – 2 ก.ค. 2566 และได้รับการตอบรับตีพิมพ์ในวารสาร Thai Journal of Mathematics Special Issue 2023	100%

- ☒ งานสำเร็จตามเป้าหมายที่เสนอไว้หรือไม่
งานวิจัยสำเร็จเป็นไปตามเป้าหมาย
- ☐ อุปสรรคหรือปัญหา
-
- ☐ แนวทางในการแก้ไขปัญหาและอุปสรรค
-

8. รายละเอียดงบประมาณ

(ระบุรายละเอียดในแต่ละหมวดอย่างชัดเจน)

งบประมาณปีที่ 1..... (2565) จำนวนเงิน.....146,000.....บาท

งบประมาณงวดที่ได้รับไปแล้ว 2.....งวด จำนวนเงิน.....146,000.....บาท

ตารางที่ 8.1 รายละเอียดงบประมาณ

รายละเอียดงบประมาณ	งบประมาณที่ได้รับ (บาท)	ใช้จ่าย (บาท)	ยอดคงเหลือ(บาท)
ค่าวัสดุ ได้แก่ วัสดุสำนักงาน เช่น กระดาษ ปากกา หมึกพิมพ์งาน วัสดุไฟฟ้าและวิทยุ เช่น ปลั๊กไฟ วัสดุคอมพิวเตอร์ เช่น คีย์บอร์ด mouse และ External hard disk และหนังสือ	35,000	24,466.60	10,533.40
ค่าใช้สอย			
1. ค่าพิมพ์เอกสาร ถ่ายเอกสาร และรวมเล่ม รายงาน	10,000	3,871.15	6,128.85
2. ค่าเดินทาง	12,000	10,500	1,500
3. ค่าลงทะเบียนนำเสนอผลงาน และ ค่าใช้จ่ายในการเข้าร่วมประชุม ได้แก่ ค่าเดินทาง และค่าที่พัก	35,000	4,076	30,924
ค่าจ้างชั่วคราว			
1. ค่าตอบแทนผู้เชี่ยวชาญ	30,000	30,000	0
2. ค่าตอบแทนผู้ช่วยวิจัย	24,000	19,000	5,000
รวม	146,000	91,913.75	54,086.25

จะขอเบิกงบประมาณงวดต่อไป (งวดที่.....) จำนวน.....บาท

9. ผลงานวิจัย พัฒนาและวิศวกรรม

ที่ได้ทำไปแล้วคิดเป็นร้อยละ.....100%.....ของงานวิจัย ตลอดโครงการ

ผู้สื ต่อ อย่างกลั่น

(.....ดร. ผู้สื ต่อ.....อย่างกลั่น.....)

หัวหน้าโครงการ

วันที่.....10...ธันวาคม...2566.....

10. ความเห็นของนักวิจัยพี่เลี้ยง (mentor) / ผู้บังคับบัญชา

โปรดให้ความเห็นในประเด็นต่อไปนี้

- ☐ ความใหม่ขององค์ความรู้ที่สร้างจากโครงการนี้
- ☒ การพัฒนาความสามารถในการวิจัยของหัวหน้าโครงการ
- ☒ โอกาสในการนำองค์ความรู้ที่ได้ไปเป็นหัวข้อในการวิจัยและพัฒนาต่อ
- ☐ งานวิจัยนี้จัดอยู่ใน Strategic research theme ไตของมหาวิทยาลัย

ผู้วิจัยได้นำเสนอองค์ความรู้ใหม่ที่จะเป็นประโยชน์กับนักวิจัยทางทฤษฎีจำนวน นอกจากนี้ยังใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาไพทอน

มาช่วยในการคำนวณและตรวจสอบความถูกต้องทางทฤษฎี จึงเป็นการสร้างความเข้มแข็งทางด้านการวิจัยแก่ผู้วิจัยเพื่อการพัฒนาต่อไป

..... **ผู้สื ต่อ** 2023.12.12
22:34:51+07'00'.....

(.....รศ.ดร...นิติมา.....อัจฉริยะโพธิ์.....)

นักวิจัยพี่เลี้ยง / อาจารย์ที่ปรึกษา / ผู้บังคับบัญชา

วันที่ 10...ธันวาคม...2566.....

ภาคผนวก แสดงสูตรการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาไพทอน

1. $(a,b)^*$

```

1 # find (a,b)*
2 def FindAB_star(num_a, num_b):
3     import math
4     # find divisors of a
5     divisors = []
6     for num in range(1, num_a + 1):
7         if num_a % num == 0:
8             divisors.append(num)
9
10    # (d|b) find divisors of a that is divisors of b too
11    d_divided_b = []
12    for i in range(0, len(divisors)):
13        if num_b % divisors[i] == 0:
14            d_divided_b.append(divisors[i])
15
16    # find the greatest common divisor of divisors of a and b divided by divisors of a
17    GCD = []
18    for y in range(0, len(d_divided_b)):
19        if math.gcd(d_divided_b[y], int(num_b / d_divided_b[y])) == 1:
20            GCD.append(d_divided_b[y])
21    result = max(GCD)
22    return result
23

```

2. e-odd part และ e-even part

```

1 def e_even_part(number):
2     # หา prime factorial
3     prime_fact = []
4     if number < 4:
5         [number, 1]
6     else:
7         while number > 1:
8             for i in range(2, int(2 + number // 2)):
9                 if i == (1 + number // 2):
10                    prime_fact.append(number)
11                    number = number // number
12                if number % i == 0:
13                    prime_fact.append(i)
14                    number = number // i
15                break
16    # Find duplicates number
17    duplicates = {}
18    for num in prime_fact:
19        if num in duplicates:
20            duplicates[num] += 1
21        else:
22            duplicates[num] = 1
23
24    beta = 1

```

```
25
26     for k, v in duplicates.items():
27         if v % 2 == 0:
28             beta = k ** v * beta
29         if v % 2 != 0:
30             pass
31     return beta
32
33
34 def e_odd_part(number):
35     # หา prime factorial
36     prime_fact = []
37     if number < 4:
38         [number, 1]
39     else:
40         while number > 1:
41             for i in range(2, int(2 + number // 2)):
42                 if i == (1 + number // 2):
43                     prime_fact.append(number)
44                     number = number // number
45                 if number % i == 0:
46                     prime_fact.append(i)
47                     number = number // i
48                 break
49
50     # Find duplicates number
51     duplicates = {}
52     for num in prime_fact:
53         if num in duplicates:
54             duplicates[num] += 1
55         else:
56             duplicates[num] = 1
57
58     alpha = 1
59
60     for k, v in duplicates.items():
61         if v % 2 == 0:
62             pass
63         if v % 2 != 0:
64             alpha = k ** v * alpha
65     return alpha
```

3. Odd phi function (ฟังก์ชันฟีคี่) และ Even phi function (ฟังก์ชันฟีคู่)

```

1 def Find_even_phi_function(rounds, finish):
2     import FindAB_star
3     import e_even_odd_part
4     result = 0
5     for num in range(1, rounds):
6         AB_star = FindAB_star.FindAB_star(num, e_even_odd_part.e_even_part(finish))
7         if AB_star == 1:
8             result = result + 1
9     return result
10
11
12 def Find_odd_phi_function(rounds, finish):
13     import FindAB_star
14     import e_even_odd_part
15     result = 0
16     for num in range(1, rounds):
17         AB_star = FindAB_star.FindAB_star(num, e_even_odd_part.e_odd_part(finish))
18         if AB_star == 1:
19             result = result + 1
20     return result

```

4. The generalized odd phi function (ฟังก์ชันฟีคี่ทั่วไป) และ The generalized even phi function (ฟังก์ชันฟีคู่ทั่วไป)

```

1 from Phi_phunction import *
2 import math
3 while True:
4     mode = int(input('Please choose mode ;\n press 0 to exit program\n press 1 to beta\n press 2 to alpha\n: '))
5     if mode == 0 or mode == 1 or mode == 2:
6         if mode == 0:
7             print('Stop programing...')
8             break
9         else:
10            rounds = math.floor(float(input('Please enter number x ; x >= 1 : ')))
11            finish = int(input('Please enter number n ; n in natural number : '))
12            if mode == 1:
13                print('Even-phi function of %s and %s is' % (rounds, finish),
Find_even_phi_function(rounds, finish))
14            elif mode == 2:
15                print('Odd-phi function of %s and %s is' % (rounds, finish),
Find_even_phi_function(rounds, finish))
16            else:
17                print('Please select an available option. Task is repeating...')
18

```

5. ฟังก์ชัน $a(x, n)$ และ $b(x, n)$

```
1  from numpy import gcd
2
3  import e_even_odd_part
4
5
6  def Euler_even_phi_function(a, b):
7      result = 0
8      for m in range(1, a + 1):
9          if gcd(m, e_even_odd_part.e_even_part(b)) == 1:
10             result += 1
11         else:
12             pass
13     return result
14
15
16 x = int(input('Please enter x : '))
17 n = int(input('Please enter n : '))
18
19 print('Euler odd-phi function of {0} {1} is {2}'.format(x, n, Euler_even_phi_function(x, n)))
20
```

```
1  from numpy import gcd
2
3  import e_even_odd_part
4
5
6  def Euler_odd_phi_function(a, b):
7      result = 0
8      for m in range(1, a+1):
9          if gcd(m, e_even_odd_part.e_odd_part(b)) == 1:
10             result += 1
11         else:
12             pass
13     return result
14
15
16 x = int(input('Please enter x : '))
17 n = int(input('Please enter n : '))
18
19 print('Euler odd-phi function of {0} {1} is {2}'.format(x, n, Euler_odd_phi_function(x, n)))
20
```